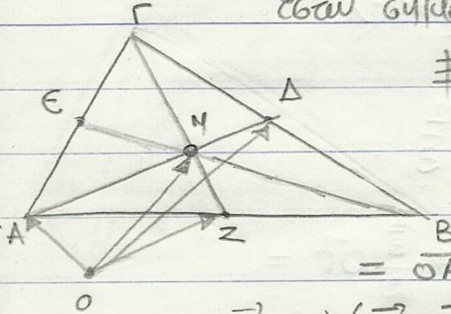
• ΝΔΟ οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται απ' το ίδιο σημείο

ΛΥΣΗ

Εστω σημείο εξωτερικό Ο



Ξέρουμε ότι $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$ ①

Με $\vec{AM} \parallel \vec{A\Delta} \Rightarrow \vec{AM}=\lambda\cdot\vec{A\Delta}$

Άρα, η ① $\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{A\Delta}$

$$=\vec{OA}+\lambda(\vec{O\Delta}-\vec{OA})=$$

$$=\vec{OA}+\lambda\left(\frac{\vec{O\Gamma}+\vec{OB}}{2}-\vec{OA}\right)=$$

$$=\vec{OA}+\frac{\lambda}{2}\vec{O\Gamma}+\frac{\lambda}{2}\vec{OB}-\lambda\vec{OA}=$$

$$=(1-\lambda)\vec{OA}+\frac{\lambda}{2}\vec{O\Gamma}+\frac{\lambda}{2}\vec{OB} \quad ②$$

όμως,

$$\vec{OM}=\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma M} \quad ③$$

Με $\vec{\Gamma M} \parallel \vec{\Gamma Z} \Rightarrow \vec{\Gamma M}=\mu\vec{\Gamma Z}$

Άρα, η ③ $\vec{OM}=\vec{O\Gamma}+\mu\vec{\Gamma Z}=\vec{O\Gamma}+\mu(\vec{OZ}-\vec{O\Gamma})=$

$$=\vec{O\Gamma}+\mu\left(\frac{OA+OB}{2}-\vec{O\Gamma}\right)=\vec{O\Gamma}+\frac{\mu}{2}\vec{OA}+\frac{\mu}{2}\vec{OB}-\mu\vec{O\Gamma}=$$

$$=(1-\mu)\vec{O\Gamma}+\frac{\mu}{2}\vec{OA}+\frac{\mu}{2}\vec{OB}=$$

$$=\frac{\mu}{2}\vec{OA}+\frac{\mu}{2}\vec{OB}+(1-\mu)\vec{O\Gamma} \quad ④$$

Η ② = ④ άρα

• $\frac{\mu}{2}=1-\lambda$, • $\frac{\mu}{2}=\frac{\lambda}{2}$, • $\frac{\lambda}{2}=1-\mu$

Επιλυουμε, το συστημα άρα

$$\begin{cases} \mu = \lambda \\ \frac{\mu}{2} = 1-\lambda \\ \frac{\lambda}{2} = 1-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \lambda = \frac{2}{3} \\ \frac{\lambda}{2} = 1-\lambda \Rightarrow \lambda = 2-2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \\ \cancel{\frac{\lambda}{2} = 1-\lambda} \end{cases}$$

Άρα $\mu = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$.

$$\vec{OM} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{OA} + \frac{\frac{2}{3}}{2}\vec{OB} + \frac{\frac{2}{3}}{2}\vec{O\Gamma} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}\right).$$

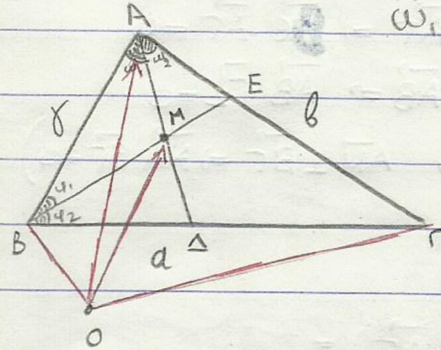
Έστω οι διάμεσοι ΑΔ, ΒΕ τέμνονται στο Ν

με $\vec{ON} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}\right)$

Άρα, $\vec{OM} = \vec{ON} \Rightarrow M \equiv N$

ΝΔΟ οι διχοτόμοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

<u>Απόδειξη</u>



$\hat{\omega}_1=\hat{\omega}_2$ και $\hat{\varphi}_1=\hat{\varphi}_2$

$$\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\left(\frac{\vec{AB}}{\gamma}+\frac{\vec{A\Gamma}}{\beta}\right) \text{①} \rightsquigarrow \vec{OM}=\vec{OA}+\frac{\lambda}{\gamma}(\vec{OB}-\vec{OA})+\frac{\lambda}{\beta}(\vec{O\Gamma}-\vec{OA})$$

$$\vec{OM}=\vec{OB}+\mu\left(\frac{\vec{BA}}{\gamma}+\frac{\vec{B\Gamma}}{\alpha}\right) \text{②} \rightsquigarrow \vec{OM}=\vec{OB}+\frac{\mu}{\gamma}(\vec{OA}-\vec{OB})+\frac{\mu}{\alpha}(\vec{O\Gamma}-\vec{OB})$$

$$\text{①}=\text{②} \Rightarrow \vec{OA}+\frac{\lambda}{\gamma}(\vec{OB}-\vec{OA})+\frac{\lambda}{\beta}(\vec{O\Gamma}-\vec{OA})=\vec{OB}+\frac{\mu}{\gamma}(\vec{OA}-\vec{OB})+\frac{\mu}{\alpha}(\vec{O\Gamma}-\vec{OB})$$

$$\Rightarrow \vec{OA}+\frac{\lambda}{\gamma}\vec{OB}-\frac{\lambda}{\gamma}\vec{OA}+\frac{\lambda}{\beta}\vec{O\Gamma}-\frac{\lambda}{\beta}\vec{OA}=\vec{OB}+\frac{\mu}{\gamma}\vec{OA}-\frac{\mu}{\gamma}\vec{OB}+\frac{\mu}{\alpha}\vec{O\Gamma}-\frac{\mu}{\alpha}OB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{\lambda}{\gamma}-\frac{\lambda}{\beta}\right)\vec{OA}+\frac{\lambda}{\gamma}\vec{OB}+\frac{\lambda}{\beta}\vec{O\Gamma}=\frac{\mu}{\gamma}\vec{OA}+\left(1-\frac{\mu}{\gamma}-\frac{\mu}{\alpha}\right)\vec{OB}+\frac{\mu}{\alpha}\vec{O\Gamma}\Rightarrow$$

Άρα
$$\begin{cases} 1-\frac{\lambda}{\gamma}-\frac{\lambda}{\beta}=\frac{\mu}{\gamma} \\ \frac{\lambda}{\gamma}=1-\frac{\mu}{\gamma}-\frac{\mu}{\alpha} \\ \frac{\lambda}{\beta}=\frac{\mu}{\alpha} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$ και $\mu=\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$

αντικαθιστώντας τα λ και μ

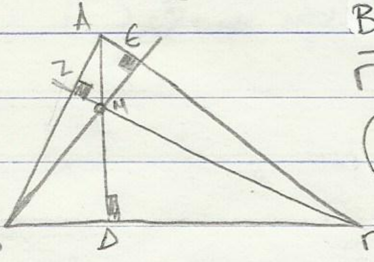
έχουμε: $\vec{OM}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{O\Gamma})$

Έστω ΑΔ και ΓΖ στο Ν (με ίδιο τρόπο)

$\vec{OM}=\vec{ON} \Rightarrow M\equiv N$ Άρα όλες από το ίδιο σημείο.

• ΝΔΟ τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο.

<u>ΛΥΣΗ</u>



$\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$

$\overrightarrow{\Gamma Z} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma Z}=0$

(ΘΔΟ $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$)

Άρα, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma})=$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M})+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\cancelto{0}{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{\Gamma M}}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\cancelto{0}{\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BM}}=$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})=$

$=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{BB}=0$